数学试卷

满分：100 分　考试时间：90 分钟

一、选择题（在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，每小题 5 分，共 8 小题；共 40 分，）

1. 已知集合 $A=\{x\in\mathbf{N}|0\leq x\leq 5\}$，$B=\{x|2-x<0\}$，则 $A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=$（　　）

A. $\{1\}$　　B. $\{0,1\}$　　C. $\{1,2\}$　　D. $\{0,1,2\}$

2. 在复平面内，复数 $z=\frac{-1+\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}$（i 为虚数单位）的共扼复数对应的点位于 (　　)

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

3. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的一条渐近线为 $y=\sqrt{5}x$，则双曲线的离心率为 (　　)

A. $\frac{\sqrt{6}}{6}$　　B. 2　　C. $\sqrt{5}$　　D. $\sqrt{6}$

4. 已知变量 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}x+2y\geq 1,\\ x-y\leq 1,\\ y-1\leq 0,\end{cases}$ 则 $z=x-2y$ 的最大值为 (　　)

A. -3　　B. 1　　C. 3　　D. 0

5. 等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_5=6$，则数列 $\{\log_6 a_n\}$ 的前 9 项和等于 (　　)

A. 6　　B. 9　　C. 12　　D. 16

6. 已知 $\cos\left(\frac{\pi}{12}-\theta\right)=\frac{1}{3}$，则 $\sin\left(\frac{5\pi}{12}+\theta\right)$ 的值是 (　　)

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$　　C. $-\frac{1}{3}$　　D. $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

7. 从标有数字 1，2，3 的三个红球和标有数字 2，3 的两个白球中任取两个球，则取得两球的数字和颜色都不相同的概率为 (　　)

A. $\frac{1}{5}$　　B. $\frac{2}{5}$　　C. $\frac{3}{5}$　　D. $\frac{4}{5}$

8. 设函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，对任意 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $f'(x)>f(x)$ 成立，则 (　　)

A. $3f(\ln 2)>2f(\ln 3)$　　B. $3f(\ln 2)=2f(\ln 3)$

C. $3f(\ln 2)<2f(\ln 3)$　　D. $3f(\ln 2)$ 与 $2f(\ln 3)$ 的大小不确定

二、填空题（共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分）

9. 已知向量 $\vec{a}=(x+1,2)$，$\vec{b}=(-1,x)$．若 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 垂直，则 $|\vec{b}|=$ ________.

10. 若命题“$\exists t\in\mathbf{R}$，$t^2-2t-a<0$”是假命题，则实数 a 的取值范围是 ________.

11. 一条光线从点 $(-2,-3)$ 射出，经 y 轴反射后与圆 $(x+3)^2+(y-2)^2=1$ 相切，则反射光线所在直线的斜率为 _______.

12. 已知抛物线 $C:y^2=8x$，点 $P(0,4)$，点 A 在抛物线上，当点 A 到抛物线准线 l 的距离与点 A 到点 P 的距离之和最小时，延长 AF 交抛物线于点 B，则 $\triangle AOB$ 的面积为 ________.

三、解答题（共 4 小题；共 44 分）

13. （本题 10 分）

已知 a，b，c 分别为 $\triangle ABC$ 三个内角 A，B，C 的对边，$c=\sqrt{3}a\sin C-c\cos A$.

（1）求 A；

（2）若 $a=2$，$\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$，求 b，c.

14. （本题 10 分）

已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_3=7$，$a_5+a_7=26$，$\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n.

（1）求 a_n 及 S_n；

（2）令 $b_n=\frac{1}{a_n^2-1}(n\in\mathbf{N}_+)$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

15.（本题 12 分）

已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的离心率为 $\sqrt{3}$，虚轴长为 $2\sqrt{2}$.

（1）求双曲线 C 的方程；

（2）已知直线 $x-y+m=0$ 与双曲线 C 交于不同的两点 A，B，且线段 AB 的中点在圆 $x^2+y^2=5$ 上，求 m 的值.

16.（本题 12 分）

设函数 $f(x)=\mathrm{e}^{x}-ax-1$.

（1）若函数 $f(x)$ 的图象在 $x=0$ 处的切线平行于 x 轴，求 a 和 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上的最小值；

（2）若函数 $f(x)$ 在 **R** 上单调递增，求 a 的取值范围；

（3）当 $a>0$ 时，设函数 $f(x)$ 的最小值为 $g(a)$，求证 $g(a)\leq 0$

试卷 1 答案

DBDBB　ABC

【答案】9. $\sqrt{2}$　　10. $(-\infty,-1]$　　11. $-\dfrac{4}{3}$ 或 $-\dfrac{3}{4}$　　12. $4\sqrt{5}$

13.（1） 由 $c=\sqrt{3}a\sin C-c\cos A$ 及正弦定理得

$$\sqrt{3}\sin A\sin C-\cos A\sin C=\sin C$$ ……………………………2 分

由于 $\sin C\neq 0$，所以

$\sin\left(A-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$, ……………………………4 分

又 $0<A<\pi$，故 $A=\frac{\pi}{3}$. ……………………………5 分

（2） $\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\sqrt{3}$,

故 $bc=4$，而……………………………7 分

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,$$

故 $c^2+b^2=8$，……………………………9 分

解得 $b=c=2$. ……………………………10 分

14.（1） 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，因为 $a_3=7$，$a_5+a_7=26$，所以有

$\begin{cases}a_1+2d=7,\\2a_1+10d=26,\end{cases}$ ……………………………2 分

解得 $a_1=3$，$d=2$，……………………………3 分

所以 $a_n=3+2(n-1)=2n+1$；$S_n=3n+\frac{n(n-1)}{2}\times 2=n^2+2n$. ……………5 分

（2） 由（1）知 $a_n=2n+1$，

所以 $b_n=\frac{1}{a_n^2-1}=\frac{1}{(2n+1)^2-1}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$， ……………………………7 分

所以 $T_n=\frac{1}{4}\cdot\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{4}\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{n}{4(n+1)}$,

即数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $T_n=\frac{n}{4(n+1)}$. ……………………………10 分

15.（1） 由题意，得 $\frac{c}{a}=\sqrt{3}$，$b^2=c^2-a^2=2$，

所以 $a=1$，$c=\sqrt{3}$.

所以所求双曲线 C 的方程为 $x^2-\frac{y^2}{2}=1$. ……………………………5 分

（2） 设 A，B 两点的坐标分别为 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，线段 AB 的中点为 $M(x_0,y_0)$．……………………………6 分

由 $\begin{cases}x^2-\frac{y^2}{2}=1,\\ x-y+m=0\end{cases}$ 得 $x^2-2mx-m^2-2=0$，……………………………8 分

所以 $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=m$，$y_0=x_0+m=2m$．……………………………9 分

所以点 $M(x_0,y_0)$ 在圆 $x^2+y^2=5$ 上，

所以 $m^2+(2m)^2=5$．……………………………11 分

所以 $m=\pm 1$．……………………………12 分

16.（1） 因为 $f(x)=\mathrm{e}^x-ax-1$，

所以 $f'(x)=\mathrm{e}^x-a$，

若函数 $f(x)$ 的图象在 $x=0$ 处的切线平行于 x 轴，

所以 $f'(0)=1-a=0$，得 $a=1$，……………………………2 分

当 $a=1$ 时，$f(x)=\mathrm{e}^x-x-1$，

$f'(x)=\mathrm{e}^x-1\geq 0$，$x\in[0,2]$，

所以 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 递增，

所以 $f(x)_{最小值}=f(0)=0$；……………………………4 分

（2） 因为 $f(x)=\mathrm{e}^x-ax-1$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，

所以 $f'(x)\geq 0$ 恒成立，

即 $f'(x)=\mathrm{e}^x-a\geq 0$ 恒成立，……………………………6 分

即 $a\leq \mathrm{e}^x$，

因为 $\mathrm{e}^x>0$，

所以 $a\leq 0$，

故实数 a 的取值范围是 $(-\infty,0]$；……………………………8 分

（3） $a>0$，由 $f'(x)=\mathrm{e}^x-a<0$，得 $x<\ln a$，

由 $f'(x)=\mathrm{e}^x-a>0$，得 $x>\ln a$，

所以当 $x=\ln a$ 时，$f(x)_{\min}=f(\ln a)=a-a\ln a-1$，

即 $g(a)=a-a\ln a-1$，……………………………10 分

则 $g'(a)=-\ln a$，

由 $-\ln a=0$，得 $a=1$，

所以 $g(a)\leq g(1)=0$，

所以 $g(a)\leq 0$．……………………………12 分