

数学试卷（一）

满分：100分 考试时间：90分钟

一、选择题（在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，每小题5分，共8小题，共40分，）

1. 已知集合 $M = \{x | x^2 + 2x - 3 < 0\}$, $N = \{x | -1 \leq x \leq 1\}$, 则 $M \cap N =$ ()

- A. $\{x | -3 < x \leq 1\}$ B. $\{x | -1 < x < 1\}$
 C. $\{x | -1 \leq x < 1\}$ D. $\{x | -3 < x < 1\}$

2. 已知命题 $p: \forall x > 0$, 总有 $(x+1)e^x > 1$, 则 $\neg p$ 为 ()

- A. $\forall x > 0$, 总有 $(x+1)e^x \leq 1$ B. $\forall x \leq 0$, 使得 $(x+1)e^x \leq 1$
 C. $\exists x_0 \leq 0$, 使得 $(x_0+1)e^{x_0} \leq 1$ D. $\exists x_0 > 0$, 使得 $(x_0+1)e^{x_0} \leq 1$

3. 数列 $\left\{ \frac{2}{a_n + 1} \right\}$ 是等差数列, 且 $a_1 = 1$, $a_3 = -\frac{1}{3}$, 那么 $a_5 =$ ()

- A. -5 B. $-\frac{3}{5}$ C. $\frac{3}{5}$ D. 5

4. 已知向量 $\vec{a} = (1, \cos \alpha)$, $\vec{b} = (5, 3)$, 若 $\vec{a} \parallel \vec{b}$, 则 $\cos 2\alpha =$ ()

- A. $-\frac{7}{25}$ B. $\frac{7}{25}$ C. $\frac{16}{25}$ D. $-\frac{16}{25}$

5. 为抗击新冠肺炎疫情, 全国各地的医护人员纷纷请战支援武汉, 某医院要从第一时间请战的5名医护人员中随机选派3名支援武汉, 已知这5名医护人员中有一对夫妻, 则这对夫妻恰有一人被选中的概率为 ()

- A. $\frac{3}{10}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{7}{10}$

6. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 2^{1-x}, & x \leq 1, \\ 1 - \log_2 x, & x > 1, \end{cases}$ 则满足 $f(x) \geq 2$ 的 x 的取值范围是 ()

- A. $[-1, 2]$ B. $[0, 2]$ C. $[1, +\infty)$ D. $[0, +\infty)$

7. 若圆 $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6 = 0$ 有且仅有三个点到直线 $x + ay + 1 = 0$ 的距离为1, 则实数 a 的值为 ()

- A. ± 1 B. $\pm \frac{\sqrt{2}}{4}$ C. $\pm \sqrt{2}$ D. $\pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

8. 定义在 R 上的函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$, 若对任意实数 x , 有 $f(x) > f'(x)$,

且 $f(x) + 2020$ 为奇函数, 则不等式 $f(x) + 2020e^x < 0$ 的解集是 ()

- A. $(-\infty, 0)$ B. $(0, +\infty)$ C. $(-\infty, \frac{1}{e})$ D. $(\frac{1}{e}, +\infty)$

选择题答案写在此处

1	2	3	4	5	6	7	8

二、填空题（共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分）

9. 已知复数 z 满足 $z = 1 - 2i$ (i 为虚数单位), 则 $|z| =$ _____

10. 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x + 2y \geq 2 \\ 2x + y \leq 4 \\ 4x - y \geq -1 \end{cases}$, 则函数 $z = 3x - y$ 的最大值是 _____.

11. 抛物线 $C_1: y = \frac{1}{4a}x^2 (a > 0)$ 的焦点与双曲线 $C_2: \frac{x^2}{3} - y^2 = 1$ 的右焦点的连线交 C_1 于第一象限的点 M . 若 C_1 在点 M 处的切线平行于 C_2 的一条渐近线, 则 $a =$ _____.

12. 若函数 $f(x) = 4 \sin \omega x \cdot \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\omega x}{2} \right) + \cos 2\omega x (\omega > 0)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3} \right]$ 上是增函数, 则 ω 的取值范围是 _____.

三、解答题（共 4 小题；共 44 分. 解答题应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

13. (本题 10 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 满足 $\sqrt{3}c = a(\sin B + \sqrt{3} \cos B)$.

(1) 求角 A ;

(2) 若 $a = 2\sqrt{7}$, $\triangle ABC$ 的面积为 $3\sqrt{3}$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

14. (本题 10 分)

已知等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 + a_5 = 22$, $a_4 = 15$, 数列 $\{b_n\}$ 满足: $4\log_2 b_n = a_n - 3$, $n \in \mathbb{N}^*$.

(1) 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) (2) 求数列 $\{a_n \cdot b_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

15. (本题 12 分)

已知函数 $f(x) = x \ln x + mx^2$.

(1) 当 $m = 1$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(2) 若 $\forall x \in (0, +\infty)$, 都有 $f(x) < 0$ 成立, 求 m 的取值范围;

16. (本题 12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$, 椭圆 C 上任意一点到椭圆两个焦

点的距离之和为 6.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 设直线上 $l: y = kx - 2$ 与椭圆 C 交于 A, B 两点, 点 $P(0, 1)$, 且 $|PA| = |PB|$, 求直线 l 的方程.